Cinématique du solide indéformable

I-Généralités et définition

La cinématique est l'étude d'un mouvement d'un corps sans tenir compte les causes qui le produisent, les causes sont les forces appliquées sur le corps. L'étude cinématique est des différentes méthodes de calcul de la vitesse et de l'accélération d'un point matériel, soit par la dérivation du vecteur de la position, soit par la composition des mouvements, ainsi que le torseur cinématique est introduit pour calculer les vitesses d'un solide indéformable.

I.1.Solide indéformable

Un solide indéformable est un ensemble des points matériels dont les distances mutuelles restent constantes au cours du temps et quel que soit le mouvement du solide.

$\forall A, B \in (S)$ et $\forall t \quad \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = cte$

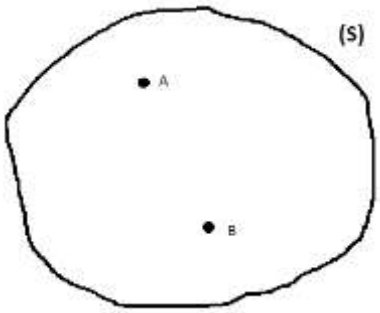


Figure 1 : (S) un solide indéformable

I.2. Mouvement de translation d'un solide

Le mouvement d'un corps solide indéformable (S) est mouvement de translation si tout vecteur de (S) reste parallèle à lui-même au cours de son mouvement, on distingue trois mouvements de translation :

A. Mouvement de translation rectiligne dont la trajectoire est une droite.

- ✓ Tous les points de (S) ont la même vitesse et leurs trajectoires sont des droites parallèles. Ainsi que le vecteur de rotation de (S) est nul.
  https://www.edumedia-sciences.com/fr/media/532-mouvement-rectiligne

Figure 2 : Mouvement de translation rectiligne

B. Mouvement circulaire dont la trajectoire est un cercle.

✓ Tous les points de (S) ont la même vitesse et leurs trajectoires sont des cercles.

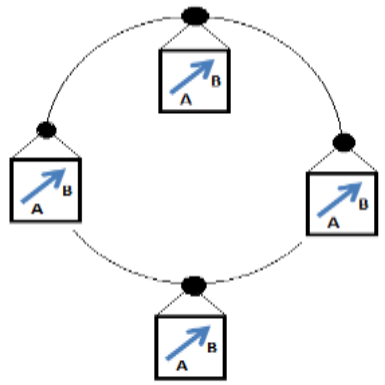


Figure 3 : Grande roue de foire

C. Mouvement curviligne dont la trajectoire est une courbe.

✓ Tous les points de (S) ont la même vitesse et leurs trajectoires sont des courbes.

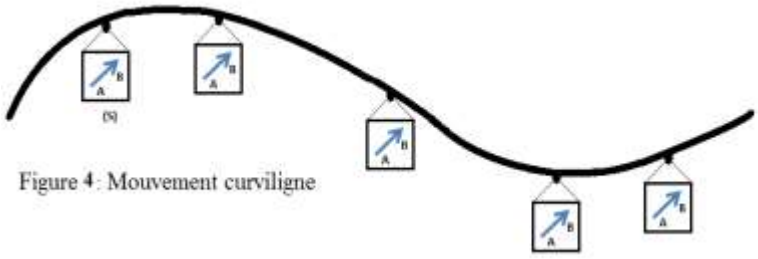


Figure 4 : Mouvement curviligne

I.2. Mouvement de rotation d'un solide

Un solide indéformable en mouvement de rotation autour d'un axe fixe (Δ) si tous ses points ont des trajectoires circulaires centrées sur l'axe de rotation (Δ).

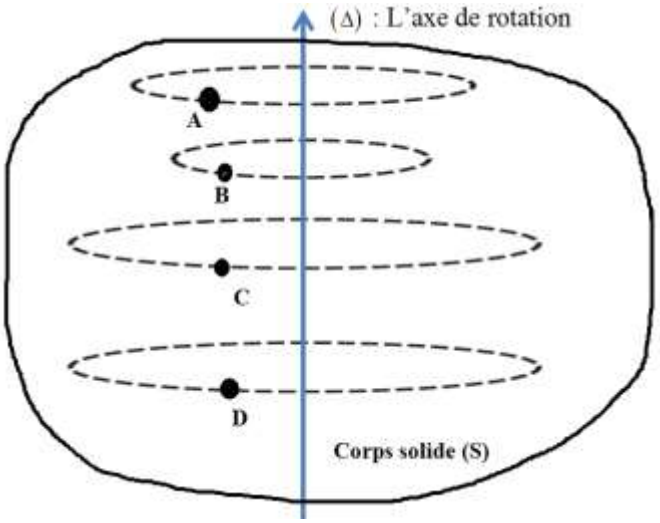


Figure 5 : Mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un axe fixe (Δ)

Que remarquez-vous ?

……

……

II. repérage d'un solide

II.1. Nombre de degrés de liberté d'un solide

Le mouvement d'un solide (S) dans un référentiel $\Re_o\left(O,\ \vec{i}_0,\ \vec{j}_0,\ \vec{k}_0\right)$ absolu (fixe) peut généralement être décomposé en :

- ✓ **Mouvement de translation suite aux changements de sa position**.
- ✓ **Mouvement de rotation suite aux changements de son orientation**.

Le nombre de degrés de liberté d'un solide représente le nombre des mouvements indépendants de translation et de rotation que ce solide peut faire. Ainsi qu'il représente le nombre de coordonnées généralisées pour paramétrer un solide. Un solide peut être paramétré par 6 paramètres qui s'appellent les paramètres primitifs, 3 paramètres pour le mouvement de translation et 3 pour le mouvement de rotation. Le nombre de degrés de liberté est toujours inférieur ou égal à celui des paramètres primitifs.

II.2. Paramétrage d'un solide

Pour paramétrer un solide (S) dans un $\Re_o\left(O,\ \vec{i}_0,\ \vec{j}_0,\ \vec{k}_0\right)$ référentiel absolu, on lie le solide avec un référentiel généralement le référentiel barycentrique $\Re_G\left(G,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ où G est le centre d'inertie de (S). Le mouvement de (S) par rapport à $\Re_o$ et celui $\Re_G$ par rapport $\Re_o$ sont les mêmes. Par conséquent, il suffit de paramétrer **le centre d'inertie G** si **(S)** fait un mouvement de translation, et de paramétrer **l'orientation de la base** $\left(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ **de** $\Re_G$ **par rapport à** $\Re_o$ si **(S)** fait un mouvement de rotation.

II.2.1. Paramétrage de de centre d'inertie G

Le centre d'inertie G d'un solide est un point matériel, donc sa position est paramétrée par l'une des coordonnées:

- ✓ Les coordonnées cartésiennes $(x,\ y,\ z)$ dans repère cartésien
- ✓ Les coordonnées cylindriques $(r,\ \theta,\ z)$ dans un repère cylindrique
- ✓ Les coordonnées sphériques $(r,\ \theta,\ \varphi)$ dans un repère cylindrique

II.2.2. Paramétrage de l'orientation de la base $\left(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$

L'orientation de $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ par rapport à $\left(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0\right)$ est paramétrer par les trois **angles d'Euler** ψ, θ, φ correspondant aux trois rotations effectuées par le solide **autour de son centre d'inertie G**. Pour visualiser ces rotations on fixe G avec l'origine O de $\Re_o\left(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0\right)$ pour que le mouvement de translation soit éliminé.

A. Angle de précession ψ

La première rotation s'effectue autour de l'axe $(O\vec{k}_0)$ avec l'angle ψ de manière à : $\left(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0\right) \rightarrow \left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}_o\right)$ où l'axe $(O\vec{u})$ est l'intersection des plans $\left(x_o o y_o\right)$ et (xoy) **figure 6**, la base $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}_o\right)$ s'appelle la première base intermédiaire. Le vecteur de rotation de $\Re_1\left(G, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}_o\right)$ par rapport à $\Re_o\left(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0\right)$ est $\vec{\Omega}\left(\Re_1/\Re_o\right) = \dot{\psi}\vec{k}_o$. ψ L'angle de rotation qui s'appelle angle de précession, il est définit par $\psi = (\vec{i}_o, \vec{u})$ figure 7.

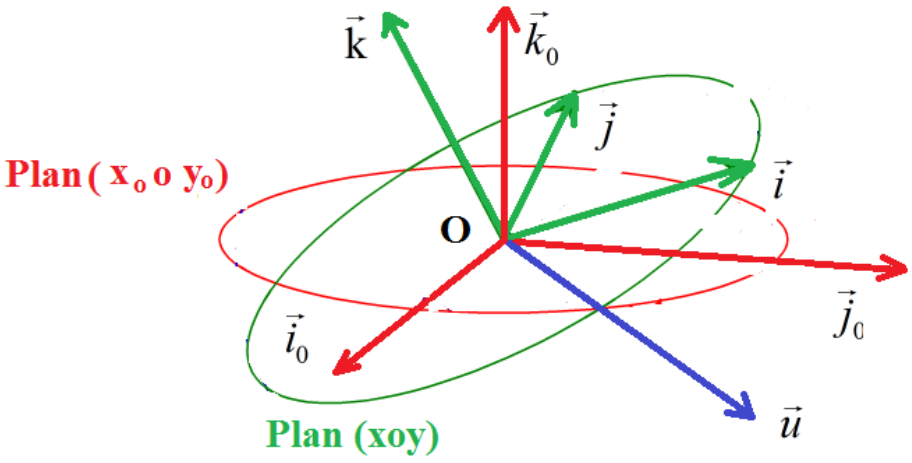


Figure 6 : $(O\vec{u})$ l'axe d'intersection des plans $\left(x_o o y_o\right)$ et (xoy).

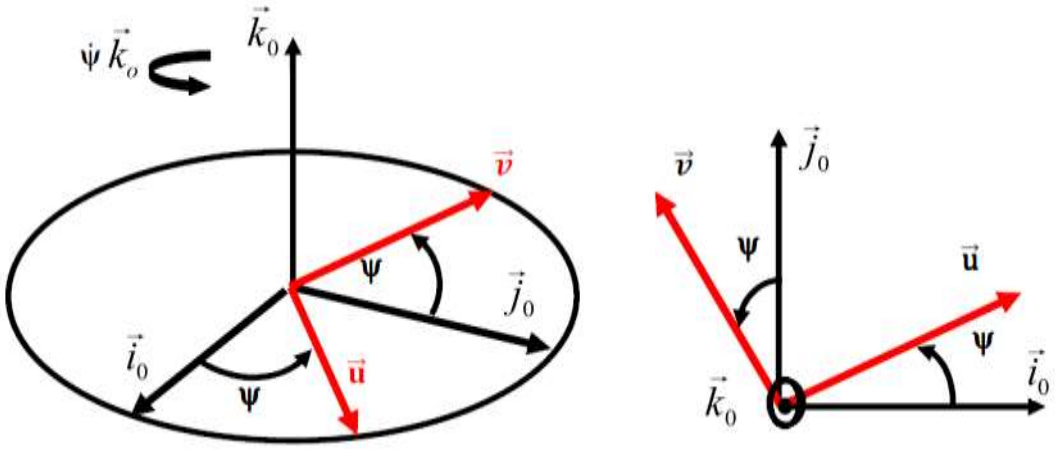


Figure 7 : la rotation de $\Re_1\left(\text{G}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}_o\right)$ par rapport à $\Re_o\left(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0\right)$

B. Angle de nutation

La deuxième rotation s'effectue autour de l'axe $(O\vec{u})$ avec l'angle θ qui s'appelle l'angle de nutation de façon à : $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}_o\right) \rightarrow \left(\vec{u}, \vec{w}, \vec{k}\right)$, la base $\left(\vec{u}, \vec{w}, \vec{k}\right)$ s'appelle la deuxième base intermédiaire. Le vecteur de rotation de $\Re_2\left(\text{G}, \vec{u}, \vec{w}, \vec{k}\right)$ par rapport à $\Re_1\left(\text{G}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}_o\right)$ est $\vec{\Omega}\left(\Re_2/\Re_1\right) = \dot{\theta}\vec{u}$, figure 8.

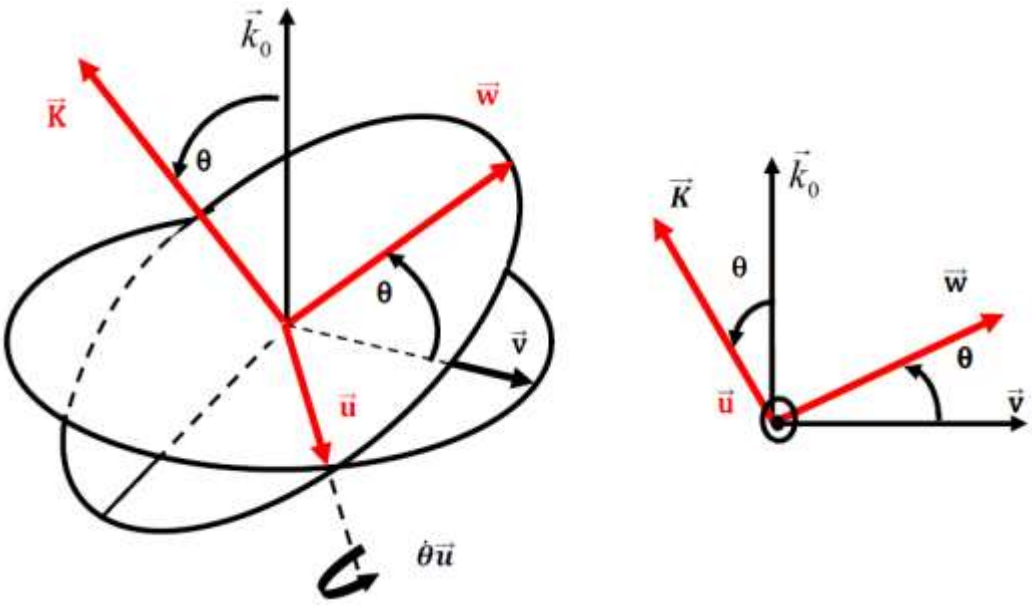


Figure 8: la rotation de $\Re_2\left(\text{G}, \vec{u}, \vec{w}, \vec{k}\right)$ par rapport à $\Re_1\left(\text{G}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}_o\right)$

C. Angle de rotation propre

La troisième rotation qui s'appelle la rotation propre qui s'effectue autour de l'axe $(O\vec{k})$ avec un angle θ qui s'appelle angle rotation propre de sorte que $\left(\vec{u},\ \vec{w},\ \vec{k}\right) \rightarrow \left(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$. Le vecteur de rotation de $\Re_G\left(G,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ par rapport à $\Re_2\left(\ \mathrm{G},\ \vec{u},\ \vec{w},\ \vec{k}\right)$ est $\vec{\Omega}\left(\Re_G / \Re_2\right) = \dot{\varphi}\vec{k}$, figure 9.

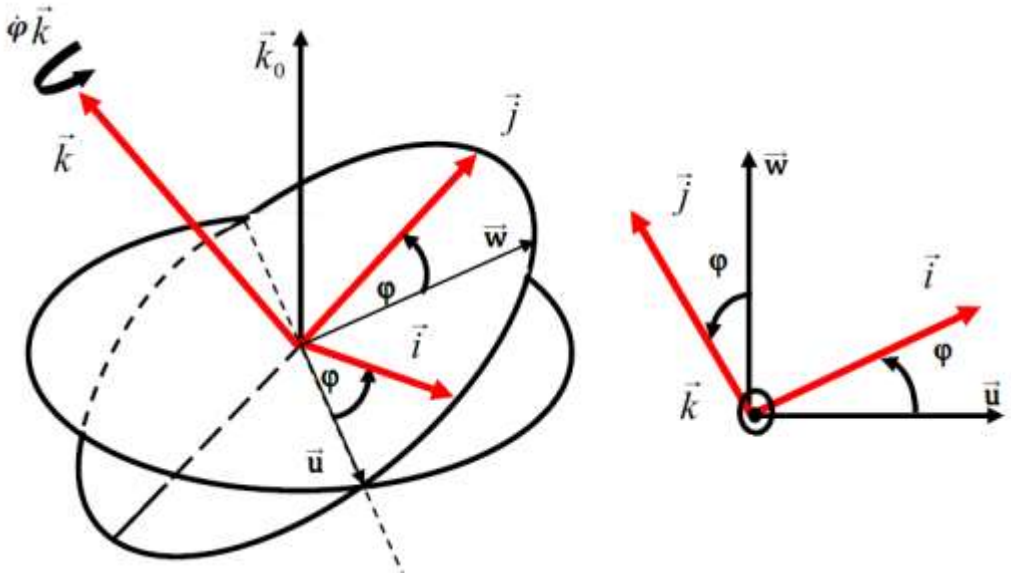


Figure 7 : la rotation de $\Re_G\left(G,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ par rapport à $\Re_2\left(\ \mathrm{G},\ \vec{u},\ \vec{w},\ \vec{k}\right)$

Enfin le vecteur de la rotation de (S) par rapport à $\Re_o\left(O,\ \vec{i}_0,\ \vec{j}_0,\ \vec{k}_0\right)$ est :

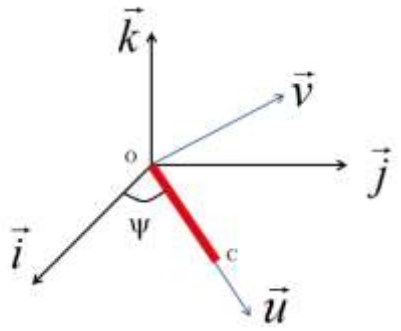
$$\vec{\Omega}\left(S/\Re_o\right) = \vec{\Omega}\left(\Re_G/\Re_o\right) = \vec{\Omega}\left(\Re_G/\Re_2\right) + \vec{\Omega}\left(\Re_2/\Re_1\right) + \vec{\Omega}\left(\Re_1/\Re_o\right).$$
$$= \dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\psi}\vec{k}_o$$

Remarque

Le vecteur de la rotation de (S) par rapport à $\Re_o\left(O,\ \vec{i}_0,\ \vec{j}_0,\ \vec{k}_0\right)$, $\vec{\Omega}\left(S/\Re_o\right)$ peut être exprimé dans n'importe quelle base, il doit choisir la base qui simplifie les calculs.

Exercice d'application 1

Une tige [OC] de longueur L, on considère $\Re\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ un repère fixe et $\Re_1\left(\ O,\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{k}\right)$ un repère lié à la tige. La tige tourne autour de l'axe $\left(O\vec{k}\right)$ avec l'angle ψ et son extrémité O reste fixe à l'origine du repère $\Re\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$.



1) Déterminer le nombre de degrés de liberté de la tige.

La tige fait un seul mouvement de rotation autour de l'axe $\left(O,\ \vec{k}\right)$, alors le nombre de degrés de liberté de la tige est 1.

2) Exprimer le vecteur de rotation de la tige par rapport au référentiel $\Re\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$.

Le vecteur de rotation de la tige par rapport au $\Re\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ est $\vec{\Omega}\left(T/_{\Re}\right)=\vec{\Omega}\left(\Re_1/_{\Re}\right)$ car $\Re_1$ lié avec la tige, alors

$$\vec{\Omega}\left(T/_{\Re}\right)=\vec{\Omega}\left(\Re_1/_{\Re}\right)=\dot{\Psi}\,\vec{k}$$

3) La tige est libre et son extrémité reste fixe au point O. On considère un troisième repère $\Re_T\left(O,\ \vec{i}_T,\ \vec{v},\ \vec{k}_T\right)$ lié à la tige, il est obtenu par la rotation de $\Re_1\left(\ O,\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{k}\right)$ autour de l'axe $\left(O\vec{v}\right)$ avec l'angle θ

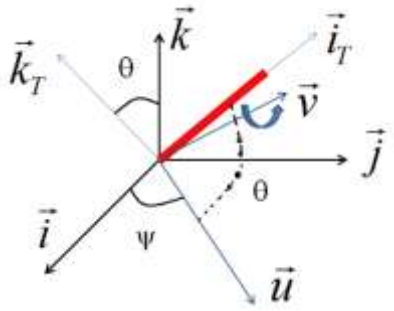
a) Déterminer le nombre de degrés de liberté de la tige.

La tige fait deux mouvements de rotation autour de l'axe $\left(O,\ \vec{k}\right)$ et autour de l'axe $\left(O,\ \vec{v}\right)$, alors le nombre de degrés de liberté de la tige est 2.

b) Exprimer le vecteur de rotation de la tige.

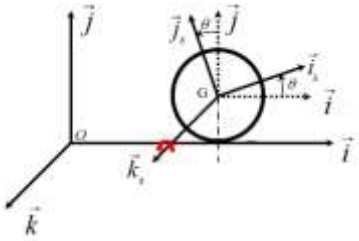
Le vecteur de rotation de la tige par rapport au $\Re\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ est :

$\vec{\Omega}\left(T/\Re\right)=\vec{\Omega}\left(\Re_T/\Re\right)=\vec{\Omega}\left(\Re_T/\Re_1\right)+\vec{\Omega}\left(\Re_1/\Re\right)$, car $\Re_T$ lié avec la tige, alors $\vec{\Omega}\left(T/\Re\right)=\dot{\theta}\vec{v}+\dot{\Psi}\vec{k}$



Exercice d'application 2

On considère un disque D homogène, de centre G, de rayon a et de masse m, il se déplacer sur l'axe matériel $(o\vec{i})$ et reste dans le plan vertical fixe (O, x, y) d'un référentiel absolu $\Re\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$. Soit $\Re_s\left(G,\ \vec{i}_s,\ \vec{j}_s,\ \vec{k}_s\right)$ le référentiel lié au disque.



1) Déterminer le nombre de degrés de liberté du disque.

Le nombre de degrés de liberté du disque est 2.

2) Exprimer le vecteur de rotation du disque.

Le vecteur de rotation du par rapport au $\Re\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ est $\vec{\Omega}\left(D/\Re\right)=\vec{\Omega}\left(\Re_s/\Re\right)=\dot{\theta}\vec{k}_s$

III. Champ de vecteurs des vitesses d'un solide

II.1. Vecteur de la vitesse d'un point d'un solide.

Le vecteur de la vitesse d'un point M d'un solide (S) en mouvement par rapport à un repère $\Re\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ à un instant t, est la dérivée du vecteur de la position $\overrightarrow{OM}(x,\ y,\ z)$ du point M par rapport au temps, il est noté $\vec{v}(M/\Re)$ son expression est donnée par:

$$\vec{v}(M/\Re) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\Big)_{\Re} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

II.2. Torseur cinématique- Distribution des vitesses

Soit (S) un solide indéformable en mouvement par rapport à un référentiel $\Re_o\left(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0\right)$ et $\Re\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un référentiel lié à (S).

Soient A et B deux point de (S), la dérivée du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport $\Re_o\left(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0\right)$ à est sous la forme suivante :

$$\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\Big)_{\Re_o} = \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\Big)_{\Re} + \Omega\left(\Re/\Re_o\right) \wedge \overrightarrow{AB}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est constant dans le référentiel $\Re\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ lié au solide, alors $\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\Big)_{\Re} = \vec{0}$, ainsi que

$$\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\Big)_{\Re_o} = \frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\Big)_{\Re_o} - \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\Big)_{\Re_o} = \vec{v}(B/\Re_o) - \vec{v}(A/\Re_o)$$

Par suite :

$$\vec{v}(B/\Re_o) - \vec{v}(A/\Re_o) = \Omega\left(\Re/\Re_o\right) \wedge \overrightarrow{AB}$$

Enfin :

$$\vec{v}(B/\Re_o) = \vec{v}(A/\Re_o) + \vec{\Omega}\left(\Re/\Re_o\right) \wedge \overrightarrow{AB}, \quad \vec{\Omega}\left(\Re/\Re_o\right) = \vec{\Omega}\left(S/\Re_o\right), \text{ car } \Re\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right) \text{ lié à (S).}$$

Alors, $\vec{v}(B/\Re_o) = \vec{v}(A/\Re_o) + \vec{\Omega}\left(S/\Re_o\right) \wedge \overrightarrow{AB}$

En basant sur cette formule, le champ des vecteurs de vitesses d'un solide est un champ antisymétrique. Par conséquent, il est représentable par un torseur qui s'appelle le torseur cinématique et noté $\left[v(S/\Re_o\right]$ ses éléments de réduction en un point A sont :

$$[v(S/\Re_o]_A = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}\left(S/\Re_o\right) \\ \vec{v}(A/\Re_o) \end{pmatrix}$$

$\vec{\Omega}\left(S/\Re_o\right)$: La résultante du torseur cinématique qui est le vecteur de rotation de $S/\Re_o$

$\vec{v}(A/\Re_o)$: Le moment du torseur cinématique en point A qui la vitesse de par rapport à $\Re_o$

Si $\vec{\Omega}\left(S/\Re_o\right) \neq \vec{0}$, alors le torseur cinématique présente un axe central qui s'appelle axe instantané de rotation. Cet axe est donc le lieu des points dont les vitesses sont parallèles au vecteur de rotation $\vec{\Omega}\left(S/\Re_o\right) \neq \vec{0}$.

II.2. a. Torseur du mouvement de translation

Soit (S) un solide en mouvement de translation par rapport un référentiel $\Re_o$, alors le vecteur de rotation de (S) par rapport à $\Re_o$ est nul $\vec{\Omega}\left(S/\Re_o\right) = \vec{0}$ et les vecteurs vitesses de tous de (S) sont égaux.

$$\forall(A \text{ et B}) \in (S) \qquad \vec{\Omega}\left(S/\Re_o\right) = \vec{0} \text{ et } \vec{v}\left(A/\Re_o\right) = \vec{v}\left(B/\Re_o\right) = \vec{w}$$

Par conséquent, le torseur cinématique se réduit à un torseur couple $[C] = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{w} \end{pmatrix}$.

Où $\vec{w}$ est le vecteur de la vitesse de translation du solide (S) par rapport au référentiel $\Re_o$.

II. 2. b. Torseur du mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe passant par l'un de ses points

Soit (S) un solide en mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe passant par l'un de ses points A, alors le vecteur de rotation de (S) par rapport à $\Re_o$ n'est pas nul $\vec{\Omega}\left(S/\Re_o\right) \neq \vec{0}$ et le vecteur de la vitesse du point A est nul $\vec{v}\left(A/\Re_o\right)$. Dans ces conditions, le torseur cinématiques se réduit en un torseur glisseur dont les éléments de réduction en un point P de (S) sont :

$$[v(S/\Re_o]_P = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}\left(S/\Re_o\right) \\ \vec{v}(P/\Re_o) \end{pmatrix}$$

Où

$$\forall P \in (S) \qquad \vec{v}(P/\Re_o) = \vec{\Omega}\left(S/\Re_o\right) \wedge \overrightarrow{AP}$$

L'axe instantané de rotation est l'axe $\left(A,\ \vec{\Omega}\left(S/\Re_o\right)\right)$.